Вариант 6

①

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n (3-x)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3x - x^2)^n$$

чтоби сходилось нужно

$$|3x-x^2| < 1.$$

$$3x - x^2 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$3x - x^2 + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$\cup$ не выполн-ся

Ответ: $\left[0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$

$P(\xi_n = n, \xi_{n-1} = n-1)$

②

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{np} \cos^2 nx \qquad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$x^{np}\cos^2 nx \le x^{np} \rightarrow \text{должен сходиться}$$

x^{np} при $p>0$ и $x \in (0;1)$ сх-ся

x^{np} при $p<0$ и $x \in \left(1; \frac{\pi}{2}\right]$ - сх-ся

x^{np} при $p=0$ расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{np}\cos^2 nx = \sum_{n=1}^{\infty} x^0 \cos^2 nx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 nx. \rightarrow \text{растёт.}$$

(3) $R = 0$ сх-се только в точке $x = 0$

(4) $$\frac{1}{\frac{1}{2} - \cos x} = 2(1 - 2\cos x)^{-1} =$$

$\in (-1; 1)$.

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)}{n!} \cdot (-2\cos x)^n =$$

$$\Rightarrow -2\cos x \in (-1; 1)$$

$$-\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{1}{2}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{\pi}{3} + \pi k\right).$$

(5) $x \in (0; 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - x) x^n$$ — Контрпример.

$(-1)^n(1-x)$ ↓ ограничен в совокупн.

x^n ↓ сх-се

$\Rightarrow$ сх-се равномер.

Ответ: нет!

Рассмотрим.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - x) x^n$$

(1) $f(x) = 0$.

(2) $r_n(x) = |0 - (1-x)x^n| = (1-x)x^n$.

(3) $\sup (r_n(x)) = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

сх-се нер

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n 2^{-nx}$ $\quad 0 \le x \le 1$

$\forall x^* \in X \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{*n} 2^{-nx}$ – числовий ряд. $S(x)$

$\frac{x}{2^x} + \frac{x^2}{2^{2x}} = \frac{x}{2^x}\Big(1-$ геом. пр.

$b_1 = \frac{x}{2^x}$

$q = \frac{x}{2^x}$ $\quad \left(\frac{x}{2^x}\right)^n \to 0 \quad \frac{2^x}{x} \to \infty$

$\frac{x}{2^x} \, ? \, 1$

$S(x) = \dfrac{\left(\frac{x}{2^x}\right)\left(1-\left(\frac{x}{2^x}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{x}{2^x}\right)} \to \frac{x}{2^x - x} = \dfrac{1}{\frac{2^x}{x} - 1} \to 0.$

$\frac{x}{2^x}\left(\left(\frac{x}{2^x}\right)^n + \left(\frac{x}{4^x}\right)^{n-1}\right) =$

$\frac{a^x - 1}{x} \cancel{=} \underline{a^x \ln a}$

$\frac{a^x}{x} = a^x \ln a + \frac{1}{x}$ $\quad \left(\frac{x^n}{2^{nx}}\right)^n \sim \dfrac{x^*}{e^{\ln 2 \cdot x}} < 1$ $\quad \left(\frac{x}{2}\right)^n$

$1 + \ln 2 \cdot x + o(x^2)$

$= 1 + \ln 2 \cdot x + \ldots$

· зб-ся поточечно на $\in X$?

$\left(\frac{x}{2^x}\right)' = \frac{2^x - x \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1 - x\ln 2}{2^x} > 0.$

$\ge 0.$

· ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{1+x^{n\alpha}}$ $\quad x \in [0, +\infty)$.

$\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 nx$ – ~~не сходится~~ ~~при~~ x

$\alpha < 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{1+x^{n\alpha}} \to$ ($x^{n\alpha} \to 0$)

$u_n(x) \to \sin^2 nx \ne 0$. не сходится

$\alpha > 0 \quad \sum f_n = \frac{1}{1+x^{n\alpha}} \quad \forall n \quad f_n > u_n$

$$\frac{1}{R} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n \cdot e^{-n+\frac{\theta}{12n}}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n+\frac{\theta}{12n}}}} \Rightarrow$$

$$\to \sqrt[2n]{\frac{1}{2\pi n \cdot e^{-2n+\frac{\theta}{6n}}}} = \sqrt[2n]{\frac{1}{2\pi n}} \cdot e^{\frac{-2n+\frac{\theta}{6n}}{2n}} = \frac{1}{e^{-1+\frac{\theta}{12n^2}}} = e^{1-\frac{\theta}{12n^2}} \to e.$$

$$R = \frac{1}{e}.$$

найти область сходимости

$$b(x) = \ln(1+x^2)\sin x = \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{3} - \dots\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i} \cdot (-1)^{i-1} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= x^3 - \frac{x^5}{2} - x \qquad \cancel{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i} \cdot x^{2i-1}}{i \cdot (2i-1)!} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2(i-1)} \cdot x^{2i+1}}{(2i+1)! \cdot (i-1)}} +$$

$x = 0$

Может ли функц. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходиться на (a, b) абсолютно, но не равномерно?

нет, т.к.

$$= e^{t}\left(\cos at + i\sin at\right) =$$

$$\lambda = a\dot{x} + b$$

$$e^{-ita}$$

$$= 2e^{t}\left(i\sin at\right)$$

$$\cos a + i\sin$$

$$e^{ita} =$$

В-5

① $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+x^n)$, $0 \le x \le 1$

$\ln(1+x^n) \le x^n$

x^n сх-ся при $x \in (-1, 1)$ неравномерно ((док-ть)
то есть $x \in [0, 1)$
при $x = 1$ расх-ся

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x\sqrt{n^2+x^2})}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^\alpha}$

$\alpha > 1$ 0,5 балла
так как ответ $\alpha > 0$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^k x^n$

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!(n-k+1)!}{(n+1)!} \right| = 1 \quad |x| < R$

$\Rightarrow \quad \cancel{k}\, \in (-1, 1)$

④ $f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$f^{(k)}(x) = (-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-k+1)\frac{1}{(1+x)^{k+1}} = (-1)^k k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$

в $a=0$ $\quad f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k$

в $a = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 x + \dots + (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} x^k$

$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1, 1)$

$R_2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n (2)^{k+1} (3)^{k+1}}{(-1)^{n+1} (3)^{k+1} (2)^{k+2}} \right| = \frac{3}{2}$

$|\cancel{x} - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2} \qquad x \in (-1, 2) \quad \Rightarrow \quad D = (-1, 1)$